Национальный исследовательский университет

"Высшая школа экономики"

Лицей

Исследовательская работа

Линейное движение

Выполнила

Журавлева Маргарита Владимировна

Научный руководитель

Браженко Александр Сергеевич

Москва — 2024

Содержание

1 Цели и задачи исследования

Цель работы: Доказательство и исследование основных свойств линейно движущихся объектов в геометрии, формирование классов задач, где применяется линейное движение, применение свойств линейного движения в геометрических задачах с олимпиад.

Задачи исследования:

0. Дать определение движения, свойства движений

1. Дать определение линейного движения.

2. Сформулировать две основные леммы, вспомогательные леммы и теоремы.

3. Исследовать замечательные точки треугольника.

4. Исследовать прямые Обера и Гаусса.

5. Сформировать возможные признаки задач, которые решаются методами линейного движения.

6. Применить на практике линейное движение в задачах.

Методы исследования:

1. Метод дополнительных построений и подсчёта углов.

2. Метод алгебраических преобразований.

3. Векторный метод.

2 Теоретическая часть

Определение 2.1. Движением называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние между точками. [1].

Свойства движения [1]:

1) Движение сохраняет порядок точек на прямой.

Следствие: движение прямую переводит в прямую, луч — в луч, отрезок — в отрезок, угол — в угол, полуплоскость — в полуплоскость, точки, лежащие на одной прямой, в точки, лежащие на одной прямой, и точки, не лежащие на одной прямой, в точки, не лежащие на одной прямой.

2) Движение сохраняет величину угла.

3) Движение сохраняет скалярное произведение векторов.

4) Движение окружность переводит в окружность равного радиуса.

5) Движение параллельные прямые переводит в параллельные прямые.

Определения 2.2 и 2.3, а так же теорема 1 и основные свойства линейного движения сформулированны с опорой на лекции сборной Москвы по математике.

Дадим определения линейного движения двумя различными способами и покажем их равносильность.

Определение 2.2. Пусть существует функция f такая, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, переводящая прямую в плоскость, и сопоставляющая каждому вещественному числу t пару координат $(at+b; ct+d)$, где a, b, c, d – некоторые фиксированные числа. Тогда функция будет задавать линейно движущуюся точку.

Определение 2.3. Пусть есть некоторое начало координат т.O и некоторая переменная т.X_t (т.е. для каждого t своя точка X_t). Тогда можно построить вектор $\overrightarrow{OX_t}$. Назовем его r_t. Будем говорить, что точка движется линейно если вектор $\overrightarrow{r_t}$ можно представить в виде суммы начального вектора $\overrightarrow{r_0}$ и вектора $\overrightarrow{vt}$, где вектор $\overrightarrow{v}$ называется скоростью точки X_t, а вектора $\overrightarrow{r_0}$ и $\overrightarrow{vt}$ фиксированы.

Данное определение не зависит от выбора точки O. Действиетльно, пусть мы выберем другую точку O_1, тогда вектор $\overrightarrow{O_1X_t}$=$\overrightarrow{OX_t} + \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{vt} + (\overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{O_1O})$, так как вектор $\overrightarrow{O_1O}$ фиксирован.

Теорема 1. *Два определения линейного движения равносильны*

Доказательство. Пусть у нас есть система координат с базисными векторами e_x и e_y. Пусть точка имеет координаты (x,y), тогда вектор от начала координат до нее раскладывается по базису как $x \cdot e_x + y \cdot e_y$
Подставим вместо x и y соответственные линейные функции из Определения 2.2:
$(at + b) \cdot e_x + (ct + d) \cdot e_y$=$at \cdot e_x + b \cdot e_x + ct \cdot e_y$+$d \cdot e_y$.
Доказательство в другую сторону аналогично. □

2.1 Основные свойства линейного движения

Определение 2.4. Прямая l_t движется линейно, если существует такой вектор скорости $\overrightarrow{v}$ что для любого момента времени $t \in \mathbb{R}$ выполняется: l_t=$l_0 + t \cdot \overrightarrow{v}$, где умножение на вектор — это паралельный перенос на него.

Лемма 1. ***(О наследовании линейности прямой)*** *Точка пересечения двух линейно движущихся прямых есть линейно движущаяся точка.*

Доказательство. Пусть наша прямая и точка соответственно l_t и X_t, тогда возьмем вектор $\overrightarrow{v}$ точки X_t как вектор скорости нашей прямой. □

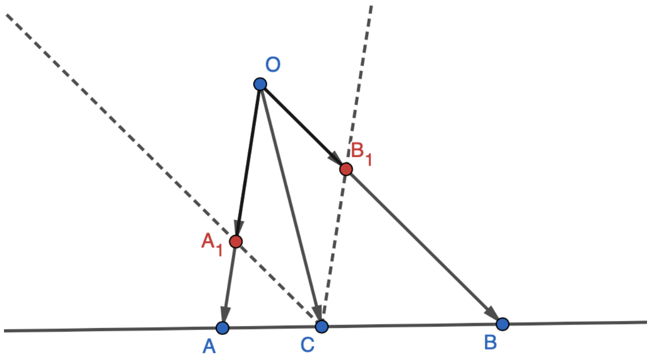
Лемма 2. ***(О наследовании линейности точки)*** *Прямая, имеющая постоянное направление и проходящая через линейно движущуюся точку, движется линейно.*

Доказательство. Пусть наши прямые это — l_t и p_t. X_t — точка их пересечения. Выберем для l_t и p_t такие векторы скорости $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$, что они соответственно коллинеарны прямой p_t и l_t. Пусть две прямые, для которых данные векторы являются направляющими, пересекаются в точке X_0. Тогда вектор $\overrightarrow{X_0X_t}$ выражается как $t \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, что значит, что X_t движется линейно.

□

2.2 Вспомогательные теоремы и леммы

Теорема 2. *Дана прямая AB, точка O, лежащая вне этой прямой. Точка C на AB такова, что $AC : CB = \alpha : \beta$ и $\alpha + \beta = 1$, тогда $\overrightarrow{OC} = \beta\overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{OA}$.*



Доказательство. Проведем через C прямые, параллельные OA и OB. Обозначим точки пересечения с прямыми OA и OB соответственно A_1 и B_1. Тогда в силу параллельнсти прямых A_1C и OB: $\frac{AA_1}{AO} = \frac{AC}{AB} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Аналогично $\frac{BB_1}{BO} = \frac{BC}{AB} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. Тогда вектор $\overrightarrow{OA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{OA}$ и вектор $\overrightarrow{OB_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{OB}$. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ □

Теорема 3. *[2] Пусть точка A и B движутся линейно. Точка C лежит на отрезке $[A, B]$ и делит его в фиксированном отношении $AC : CB = k, k \in \mathbb{R}$, тогда точка C движется линейно.*

Доказательство. Пусть точка O из Теоремы 2 — точка отсчета. Тогда начальные положения точек A и B это соответственно $\overrightarrow{OA_0}$ и $\overrightarrow{OB_0}$. Тогда выберем такие α и β, что $AC : CB = \alpha : \beta$ и $\alpha + \beta = 1$. По Теореме 2 начальное положение точки C определяется как $\overrightarrow{OC_0} = \beta\overrightarrow{OB_0} + \alpha\overrightarrow{OA_0}$. В момент времени t положения точек A и B определяются соответственно $\overrightarrow{OA_0} + t \cdot \overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{OB_0} + t \cdot \overrightarrow{w}$, где $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w}$ — вектора скоростей. Тогда положение точки C: $\overrightarrow{OC_t} = \beta(\overrightarrow{OB_0} + t \cdot \overrightarrow{w}) + \alpha(\overrightarrow{OA_0} + t \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OC_0} + t \cdot (\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w})$ □

Теорема 4. *Точки X_t, Y_t, Z_t движутся линейно. Если существуют три различных момента времени t, в каждом из которых данные точки лежат на одной прямой, то в любой момент времени они лежат на одной прямой.*

Доказательство. Возьмем систему координат, в которой одна из точек неподвижна. Пусть это точка X_t. Тогда точки Y_t Z_t движутся линейно. Их координиаты это $(a_yt + b_y; c_yt + d_y)$ и $(a_zt + b_z; c_zt + d_z)$. Если точки лежат на одной прямой, то нам достаточно $\frac{a_yt+b_y}{c_yt+d_y} = \frac{a_zt+b_z}{c_zt+d_z}$. Преобразуем наше выражение:

$t^2(a_yc_z - c_ya_z) + t(a_yd_z + b_yc_z - d_zc_y - a_zd_y) + b_yd_z - d_yb_z = 0$

Тогда для того, что бы квадратный трехчлен всегда был равен нулю, необходимо и достаточно что бы он был равен 0 в трех точках. Эти три точки и есть наши моменты времни из условия. □

Лемма 3. ***(Лемма о воробьях для линейного движения)*** *Пусть дан фиксированный угол с вершиной O. По прямым l_1 и l_2, образующим данный угол, с постоянными скоростями движутся точки A_t и B_t (A — по прямой l_1, B — по прямой l_2). Прямая l_3 также проходит через точку O. Тогда точка пересечения окружности (A_tB_tO) с прямой l_3 — C_t, движется линейно.*

Доказательство. Для начала докажем следующий факт: все окружности из условия леммы либо имеют две общие точки, либо попарно касаются в точке O (Данное утверждение встречается нам под известным названием "Лемма о воробьях"). Действительно, центры получаемых окружностей движутся линейно, потому что они образованы прямыми постоянного направления (перпендикулярами) к линейно движущимся точкам (середины отрезков OA_t и OB_t движутся линейно, так как точки A_t и B_t движутся линейно, а точка O фиксирована), которые являются серединными перпендикулярами, а значит, в пересечении дают центры окружностей (линейно движущиеся прямые в пересечении дают линейно движущуюся точку). Если оказалось так, что прямая, образованная центрами окружностей, проходит через вершину O, то все они попарно касаются в данной точке O. В противном случае отметим точку O', симметричную нашей точке O, относительно прямой, образованной центрами наших окружностей. В таком случае точка O' фиксирована (так как она получена отражением фиксированной точки относительно фиксированной прямой) и будет лежать на каждой из окружностей (в силу равенства отрезков, полученных из симметрии, если точка X_t является центром наших окружностей в данный момент врмени, то $OX_t = X_tO'$) Вернемся к доказательству леммы: из выше доказанного факта следует, что все окружности (A_tB_tO) имеют общую точку K. Применим обратное утверждение к фиксированной точке K, линейно движущейся точке B_t, прямым l_2, l_3. И поймем, что точка C_t тоже будет двигаться линейно. □

Теперь мы можем применить всю описанную выше теорию для расмотрения геометрических конструкций, теорем и задач.

3 Замечательные точки треугольника

3.1 Центр описанной окружнсоти

Определение 3.1. Центром описанной окружности треугольника называется точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам

Утверждение 5. *Пусть стороны данного треугольника ABC движутся линейно. Центр описанной окружности движется линейно.*

Доказательство. Так как по своему определению центр описанной окружности — это пересечение серединных перепендикуляров, а серединный перпендикуляр — это прямая постоянного направления (под углом $90°$), проходящая через линейно движущуюся точку (середина каждой из сторон треугольника движется линейно, так как делит отрезок в фиксированном отношении). Пересечением двух линейно движущихся прямых является линейно движущаяся точка, каковой и является центр описанной окружности. □

Утверждение 6. *Пусть вершины данного треугольника ABC движутся линейно. Центр описанной окружности не всегда движется линейно.*

Действительно, пусть наш треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Пусть вершины основания фиксированы, а третью вершину будем двигать линейно по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к основанию. Тогда при приближении точки B к основанию, серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC будут стремиться к случаю параллельности, а именно в предельной точке $B = M$, где M — середина AC, серединные перпендикуляры к сторонам станут параллельными прямыми, проходящими через середины отрезков AM и MB, перпендикулярно AC. Но при таком положении центр описанной окружности является бесконечно удаленной точкой. Если центр двигался бы линейно, то ни за какое количество времени не смог бы уйти на бесконечность.

3.2 Инцентр

Определение 3.2. Инцентром или центром вписанной окружности называется точка пересенчения биссектрис внутренних углов треугольника.

Утверждение 7. *Пусть стороны данного треугольника ABC движутся линейно. Инцентр движется линейно.*

Доказательство. Мы знаем, что биссектриса — это такой отрезок в треугольнике, который делит угол пополам. При линейном движении прямых, содержащих стороны треугольника, углы треугольника остаются неизменными, а значит направление каждой прямой, содержащей биссектрису постоянно, также каждая прямая, содержащая биссектрису, проходит через линейно движущуюся точку, каковой является вершина трегольника, ведь она определяется пересечением линейно движущихся прямых. А значит для каждой такой прямой верно, что она проходит под постоянным направлением через линейно движущуюся точку, а значит движется линейно, тогда пересечение таких линейно движущаяся прямых есть линейно движущаяся точка — инцентр нашего треугольника. □

Несложно заметить, что данные рассуждения можно применить и для эксцентра треугольника (эксцентром называют центр вневписанной окружности данного треугольника)

Утверждение 8. *Пусть вершины данного треугольника ABC движутся линейно. Инцентр движется линейно.*

Доказательство. Пусть это так, тогда сделаем фиксированными точки A и B, а точка C будет двигаться по прямой, паралельной прямой AB. Если центр вписанной окружности двигается не по прямой, не паралельной AB, то найдется момент времени в который он окажется вне части плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми (AB и прямая проходящая через C параллельно AB), а значит, окажется вне треугольника, что невозможно. Значит, инцентр движется по прямой, параллельной нашей фиксированной стороне. Тогда расстояние от него до стороны AB фиксировано. Данное растояние является радиусом вписанной окружности. При движении данного вида мы знаем, что площадь треугольника ABC не меняется, так как не изменяется основание и длина высоты, опущенной на него. Мы знаем, что $S_{ABC} = p \cdot r$, где S_{ABC}, p, r — площадь треугольника, его полупериметр и радиус вписанной окружности соответственно (Полупериметр может не изменяться, если точка C уходит на бесконечность, тогда в пределе полупериметр тоже является бесконечностью). □

3.3 Ортоцентр

Определение 3.3. Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот

Утверждение 9. *Пусть стороны данного треугольника ABC движутся линейно. Ортоцентр движется линейно.*

Доказательство. Каждая из высот треугольника является прямой постоянного направления, проходящей через линейно движущуюся точку. Действительно, линейно движущейся точкой в данном случае становится вершина треугольника, так как она является пересечением двух линейно движущихся прямых - сторон треугольника. Направлением становится перпендикулярность линейно двищущейся прямой основанию, к которому проведена высота. Тогда пересечение высот есть пересечение линейно движущихся прямых, что является линейно движущейся точкой. □

Утверждение 10. *Пусть вершины данного треугольника ABC движутся линейно. Ортоцентр не всегда движется линейно.*

Действительно, возьмем конструкцию, аналогичную той, которую мы использовали в качестве примера, подтверждающего аналогичное утверждение для центра описанной окружности. Пусть наш треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Пусть вершины основания фиксированы, а третью вершину будем двигать линейно по прямой, являющейся серединным перпендикуляром к основанию. Тогда при приближении точки B к основанию высоты к сторонам AB и BC будут стремиться к случаю параллельности, а именно в предельной точке $B = M$, где M — середина AC, высоты к сторонам станут параллельными прямыми, проходящими через вершины A и C перпендикулярно AC. Но при таком положении ортоцентр является бесконечно удаленной точкой. Если ортоцентр двигался бы линейно, то ни за какое количество времени не смог бы уйти на бесконечность.

3.4 Центроид

Определение 3.4. Центроидом называется точка пересечения медиан в треугольнике

Утверждение 11. *Пусть стороны данного треугольника ABC движутся линейно. Центроид движется линейно.*

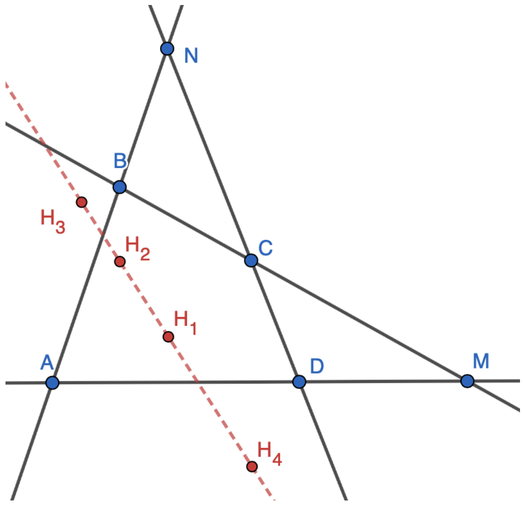
Сначала докажем вспомогательный факт: Если координаты вершин треугольника это (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то координаты центроида это: $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$
Мы знаем, что координаты середины отрезка — это полусуммы соответственных координат. Тогда середина одной из сторон треугольника имеет координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Центроид делит медиану треугольника в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Направляющий вектор $\overrightarrow{a}$ прямой, содержащей медиану, имеет координаты $(\frac{x_1+x_2-2x_3}{2}, \frac{y_1+y_2-2y_3}{2})$, тогда центроид имеет координаты суммы (x_3, y_3) и $\frac{2}{3}\overrightarrow{a}$, что равно $(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

Доказательство. Из доказанного выше факта видно, что мы можем в явном виде задать координаты центроида, используя координаты вершин треугольника, которые являются линейно движущимеся точками (пересечения линейно движущихся прямых) □

4 Прямая Обера и Гаусса

4.1 Прямая Обера

Определение 4.1. Пусть на плоскости дано четыре прямые общего положения. Тогда ортоцентры треугольников, высекаемых на этой плоскости прямыми, лежат на прямой, которая называется прямой Обера.



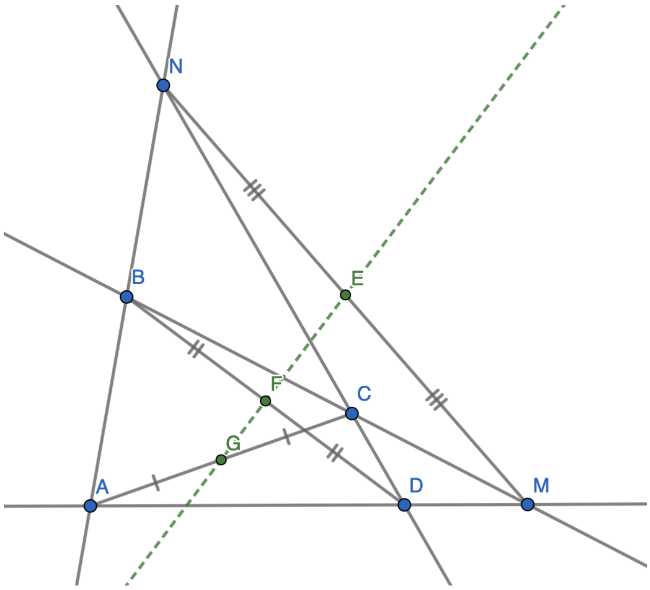
Докажем данный факт при помощи линейного движения.

Доказательство. Введем обозначения вершин нашего четырехсторонника, как показано на рисунке выше. Точки H_1, H_2, H_3, H_4 ортоцентры соответственно треугольников AND, ABM, BNC, и CDM. Будем линейно двигать прямую BC, фиксируя оставшиеся три. Так как точки пересечения прямой с другими прямыми движутся линейно, то и ортоцентры движутся линейно. Мы знаем, что достаточно трех положений для доказательства того, что ортоцентры треугольников CDM, ABM, и BNC лежат на одной прямой. При данном движении фиксированным остается ортоцентр треугольника AND, так как сам треугольник не изменяется.
Первое положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = D = M$. Тогда ортоцентр треугольника CDM есть точка $C = D = M = H_4$. Про каждый из следующих ортоцентров можно утверждать, что он лежит на прямой, содержащей высоту, проведенную из точки C к AN.
Второе положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = B = N$. Тогда ортоцентр треугольника BNC есть точка $C = B = N = H_3$. Про каждый из следующих ортоцентров можно утверждать, что он лежит на прямой, содержащей высоту, проведенную из точки N к AD.
Третье положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $A = B = M$. Тогда ортоцентр треугольника ABM есть точка $A = B = M = H_2$. Про каждый из следующих ортоцентров можно утверждать, что он лежит на прямой, содержащей высоту, проведенную из точки A к ND.

□

4.2 Прямая Гаусса

Определение 4.2. Пусть на плоскости дано четыре прямые общего положения. Их точки пересечения - это выпуклый четырехугольник $ABCD$, точки M, N — оставшиеся точки пересечения. Тогда середины отрезков AC, BD, MN лежат на прямой, которая называется прямой Гаусса.



Докажем данный факт при помощи линейного движения.

Доказательство. Действуем в нашем доказательстве аналогично доказательству факта из предыдущего раздела. Будем линейно двигать прямую BC, фиксируя оставшиеся три. Так как точки пересечения прямой с другими прямыми движутся линейно, то и середины отрезков движутся линейно. Мы знаем, что достаточно трех положений для доказательства того, что данные середины отрезков всегда лежат на одной прямой.

Первое положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = D = M$. Тогда середина отрезка MN становится серединой отрезка ND, середина AC серединой AD, середина BD остается на месте. Но тогда данные три точки очевидно лежат на одной прямой, параллельной AN и проходящей через середину BD.

Второе положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = B = N$.Тогда середина отрезка AC становится серединой отрезка AN, середина BD серединой ND, середина NM остается на месте. Но тогда данные три точки очевидно лежат на одной прямой, параллельной AD и проходящей через середину AN.

Третье положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $A = B = M$. Тогда середина отрезка BD становится серединой отрезка AD, середина MN серединой AN, середина AC остается на месте. Но тогда данные три точки очевидно лежат на одной прямой, параллельной ND и проходящей через середину AD.

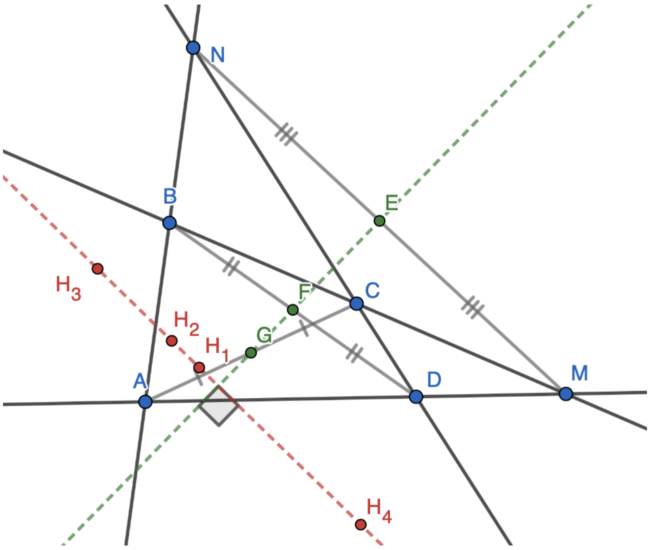
□

4.3 Перпендикулярность прямой Обера и прямой Гаусса

Утверждение 12. *Пусть есть 4 линейно движущихся точки A_1, A_2, A_3, A_4. Если при трех различных моментах времени оказалось, что $A_1A_3 \perp A_2A_4$, то это верно всегда.*

Доказательство. Пусть координаты точки A_i это $(a_it + b_i; c_it + d_i)$. Условие перпендикулярности можно переформулировать в терминах скалярного произведения, а именно $(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}) = 0$. Мы знаем, что скалярное произведение записывается при помощи координат, тогда $(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_2A_4}) = (t(a_3 - a_1) + (b_3 - b_1)) \cdot (t(a_4 - a_2) + (b_4 - b_2)) + (t(c_3 - c_1) + (d_3 - d_1)) \cdot (t(c_4 - c_2) + (d_4 - d_2))$. Заметим, что написанное выражение не выше второй степени, а значит, для такого многочлена достаточно обратиться в 0 в трех точках, для того чтобы обращаться в него всегда. Тремя такими точками и станут наши три момента времени.

□



Теперь перейдем к доказательству перпендикулярности наших прямых. Будем пользоваться утверждением, доказанным выше, и проверим три положения.

Первое положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = D = M$. Тогда из того, что мы доказали выше, при данном расположении точек прямая Обера является прямой, содержащей высоту, проведенную из точки C к AN, а прямой Гаусса — прямая, параллельная AN и проходящей через середину BD. Но тогда данные прямые перпендикулярны.

Второе положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $C = B = N$. Тогда из того, что мы доказали выше при данном расположении точек прямая Обера является прямой, содержащей высоту, проведенную из точки N к AD, а прямой Гаусса — прямая, параллельная AD и проходящая через середину AN. Но тогда данные прямые перпендикулярны.

Третье положение: Возьмем момент времени, при котором совпадают точки $A = B = M$. Тогда из того, что мы доказали выше при данном расположении точек прямая Обера является прямой, содержащей высоту, проведенную из точки A к ND, а прямой Гаусса — прямая, параллельная ND и проходящая через середину AD. Но тогда данные прямые перпендикулярны.

5 Признаки задач на линейное движение

Хотелось бы обозначить несколько признаков, которые мне удалось выделить в течении исследования. Они появляются естественным образом из основных и вспомогательных лемм линейного движения.

1) **Отсутствие фиксированной картинки**

Отсутствие фиксации модели в задаче возникает довольно часто. Его можно распознать, увидев в условии следующую формулировку (или на нее похожие): "На прямой (окружности, отрезке, луче) отмечена произвольная точка".

2) **Наличие в задаче фиксированного отношения**

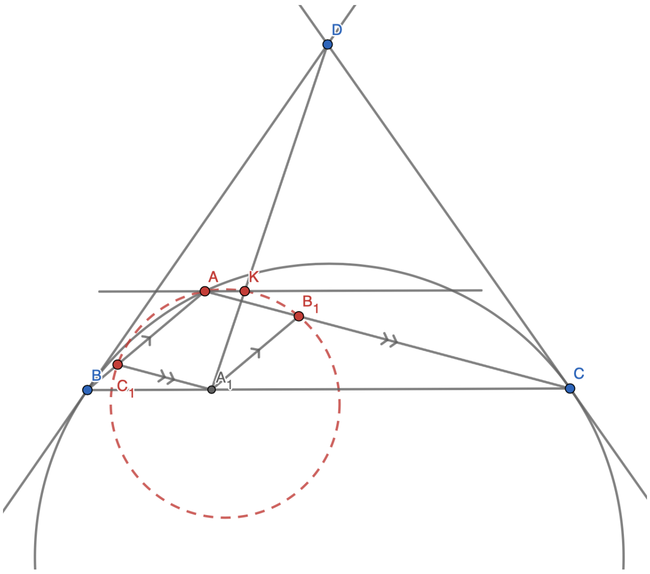
Под фиксированным отношением в данном случае подразумевается не только численно данное отношение, но и такое, которое может быть задано неявно. Например отношение, появляющееся при применении свойства биссектрисы, подобия, гармонических четверок. Например: "Точки выбраны так, что равны отрезки (относятся 1:2, относятся как соответственные стороны треугольника/четырехугольника)".
Стоит уточнить, что наличие данных условий в задаче не гарантирует возможность нахождения решения при помощи линейного движения, однако они могут помочь на начальном этапе освоения такого аппарата.
3)**Конструкции с произвольными четырехсторонниками** Данные конструкции удобны для применения линейного движения. Как мы заметили, при доказательстве фактов о прямых Обера и Гаусса, смотреть за изменением конструкции при движении одной из четырех прямых данного четырехсторонника выгодно, ведь точки ее пересечения с оставшимися прямыми будут двигаться линейно.
Также хочется упомянуть связь между выделенными мною признаками и концепцией линейного движения в целом. Действительно, линейное движение построено на поиске нами геометрических фактов, которые связывают объекты, и анализе данных фактов с целью определения зависимости между ними (лишь после этого задача сводится к рассмотрению тривиальных, или по крайней мере более простых геометрических конструкций). В процессе поиска данных фактов мы придем к выяснению природы данной картинки (угадаем фиксированное положение некоторых точек, или полное отсутствие данной фиксации)

6 Практическое применение

В практической части исследования мне хотелось бы рассмотреть несколько задач. Некоторые из них взяты с листков сборной Москвы по математике, другие с отборов на кружки (онлайн-кружок Тинькофф), туров олимпиад (Турнир Городов).

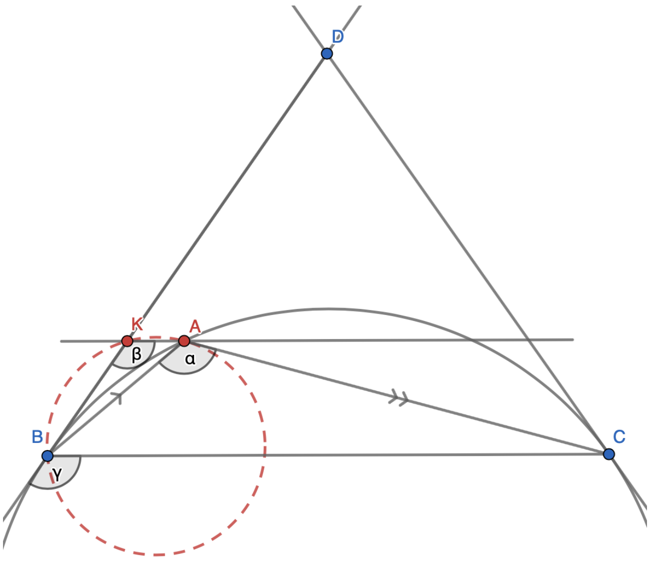
6.1 Задача 1

В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Отрезок A_1D пересекает прямую, проходящую через точку A параллельно прямой BC, в точке K. Докажите, что четырехугольник B_1AKC_1 — вписанный. [3]



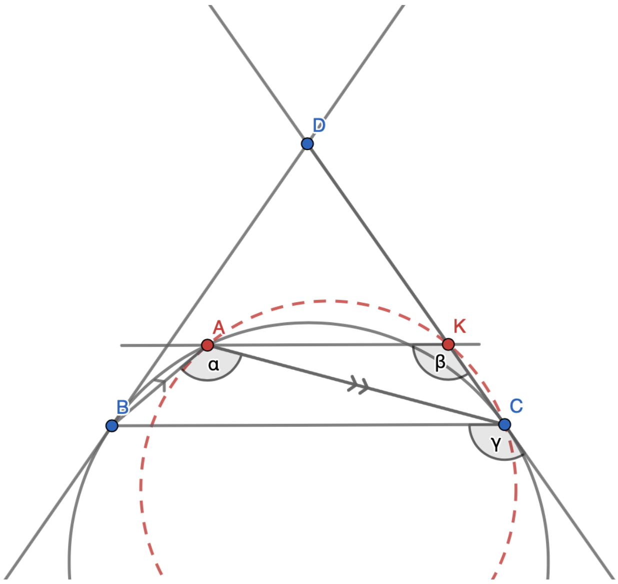
Зафиксируем треугольник ABC и будем двигать точку A_1 по прямой BC. При таком движении точки B_1, C_1, D движутся линейно (являются точками пересечения прямых постоянного направления через линейно движущуюся точку и фиксированнных прямых). Рассмотрим два положения. Проверить задачу в них будет достаточно по лемме о воробьях для линейного движения.

Первое положение: $A_1 = B$, тогда $B_1 = A$, $C_1 = B$. Мы хотим показать вписанность четырехугольника, но в нашем случае он вырождается в треугольник BKA, описанная окружность которого касается AC в точке A.



Действительно, $\angle\beta = \angle\gamma$ в силу параллельности прямых из условия. А $\angle\gamma = \angle\alpha$, так как прямая BD является касательной к описанной окружности треугольника ABC. А значит, утверждение верно.

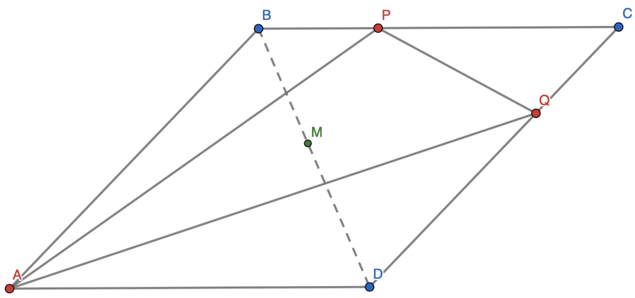
Второе положение: $A_1 = C$, тогда $B_1 = C$, $C_1 = A$. Мы хотим показать вписанность четырехугольника, в нашем случае он вырождается в треугольник CKA, описанная окружность которого касается AB в точке A.



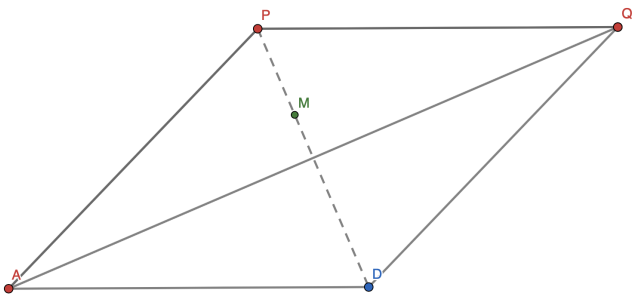
Действительно, $\angle\beta = \angle\gamma$ в силу параллельности прямых из условия. А $\angle\gamma = \angle\alpha$, так как прямая CD является касательной к описанной окружности треугольника ABC. А значит, утверждение верно.

6.2 Задача 2

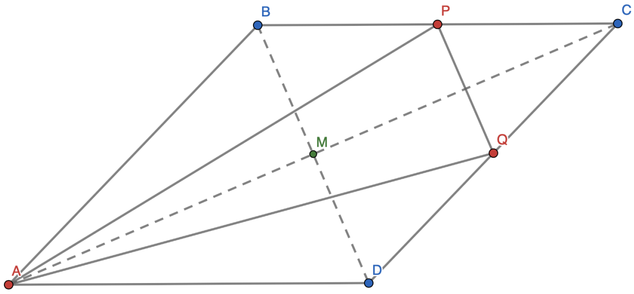
На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба. [4]



Пусть наш ромб будет фиксированным. Будем двигать линейно точку P, тогда точка Q будет двигаться линейно в силу равенства отрезков $BP = PQ$ и равенства сторон ромба $BC = CD$. В треугольнике APQ линейно движутся две вершины, а значит середина сотрезка, концами которого являются данные вершины движется линейно. Тогда точка пересечения медиан M треугольника APQ движется линейно, потому что делать отрезок медианы AA_1, где A_1 — середина PQ, в отношении 2:1, а значит движется линейно. Проверим три положения, что бы убедиться, что наш центроид лежит на диагонали BD ромба.



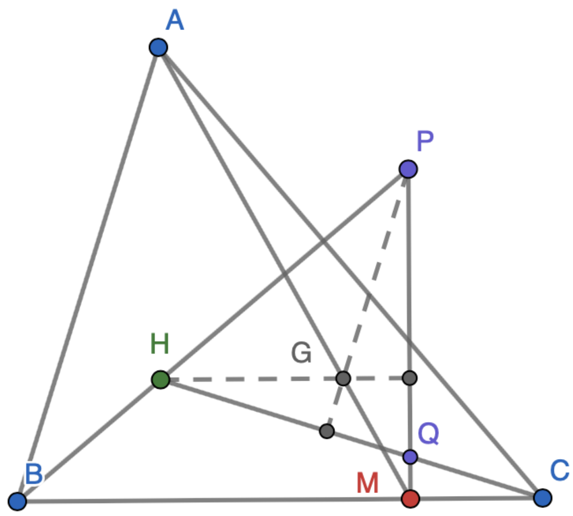
Первое положение: $P = B$, тогда $C = Q$. Тогда треугольник APQ — равнобедренный, в котором BD является медианой, а значит, центроид лежит на диагонали.
Второе положение: $P = C$ Рассматривается аналогично.



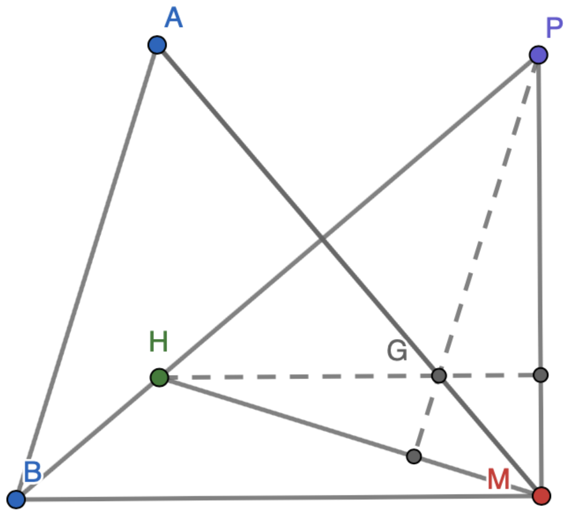
Третье положение: P — середина BC, тогда Q — середина CD. Тогда в силу симметрии треугольник APQ — равнобедренный, причем $PQ = \frac{1}{2}BD$. Диагональ AC перпендикулярна PQ, делит его пополам, и сама делится в отношении 1:3. Но тогда на ней лежит центроид, и в силу того, что он делит медиану в отношении 2:1, он делит диагональ в отношении 1:1, а значит является его серединой, и лежит на второй диагонали.

6.3 Задача 3

Данная задача была представлена на Мексиканской математической олимпиаде в 2024 году под номером 4.
На стороне BC треугольника ABC с ортоцентром H отмечена точка M. Перпендикуляр к BC в точке M пересекает прямые BH и CH в точках P и Q соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника HPQ лежит на прямой AM.



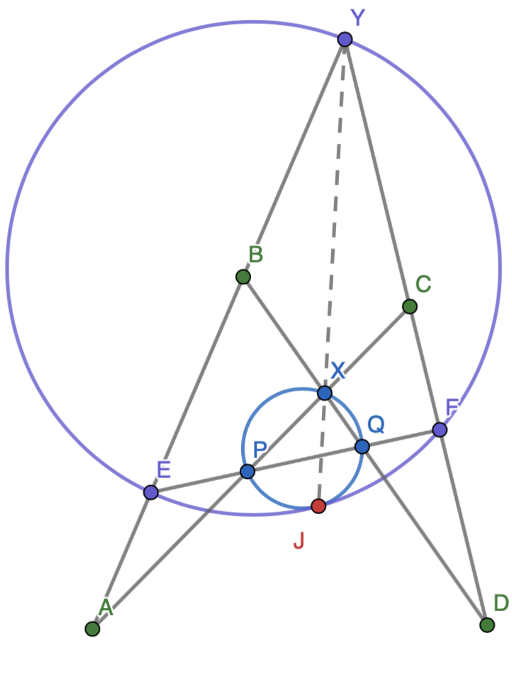
Зафиксируем треугольник ABC, а точку M будем двигать линейно по стороне BC. Тогда точки P и Q движутся линейно, так как являются пересечением прямой постоянного направление через линейно движущуюся точку и фиксированной прямой. Но тогда высоты треугольника HPQ движутся линейно по аналогичной причине, а значит их пересечение, как линейно движущихся прямых, есть линейно движущаяся точка. Назовем ее G. Тогда необходимо проверить два положения.



Первое положение: $M = C = Q$, тогда точка G лежит на прямой $AC = AM$ в силу перпендикулярности прямой BH стороне AC как высота. Второе положение: $M = B$ рассматривается аналогично.

6.4 Задача 4

Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, а прямые AB и CD в точке Y. Точки E и F на сторонах и таковы, что $AE \cdot DF = BE \cdot CF$. Прямая EF пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q. Докажите, что описанные окружности треугольников PQX и EFY касаются.



Выберем точку E на AB и будем двигать ее линейно. Тогда точка F также движется линейно, так как получается посредством применения гомотетии и симметрии, переводящей сначала E в точку E' с сохраняющимся отношением в силу подобия треугольников ABX и DCX, а после отражением относительно середины CD. Обе операции сохраняют линейность. Гомотетия из своего определения — преобразование плоскости, сдвигающее точку на вектор (не нулевой) по прямой, проходящей через центр гомотетии (неподвижная точка) и нашу точку, а сдвиг на вектор линейно движущейся точки сохраняет линейность. Симметрия (центральная) может быть определена как сдвиг точки на удвоенный вектор от нее до центра симметрии (неподвижная точка), а сдвиг на вектор сохраняет линейность. Точки E и F связаны.

Покажем, что $EFYJ$ —- одна окружность, где J —- образ X при инверсии с центром Y и радиусом $YB \cdot YA$. По лемме о воробьях для линейного движения достаточно двух положений.

Первое положение: $E = A$, тогда $F = C$. Значит, $YB \cdot YE = YX \cdot YJ = YC \cdot YD \Rightarrow EFYJ$ лежат на одной окружности. Тогда $\angle YJC = \angle XDC = \angle XAC \Rightarrow AJCY$ лежат на одной окружности.

Второе положение, при котором $E = B$, $F = D$ рассматриватся аналогично.

Определим точку K как пересечение окружности EAJ и прямой AC. Тогда точка K движется линейно, так как E движется линейно $\Rightarrow$ центр окружности движется линейно $\Rightarrow$ середина движется линейно $\Rightarrow$ точка K движется линейно. Тогда EKF движется линейно. Достаточно трех положений, в каждом из которых данные три точки лежат на одной прямой, что бы они всегда лежали на одной прямой.

Первое положение: $E = B$, тогда так как точка K - пересечение окружности и прямой AC, а мы знаем из сказанного выше, что $ABXJ$ — вписанный, то точка X - это пересечение окружности и прямой AC и она лежит на одной прямой с точкой $F = D$ (диагональ четырехугольника)

Второе положение $E = A$ рассматривается аналогично.

Третье положение: $E = Y$, тогда точка F где-то на прямой CD. Знаем, что $AJCY$ вписанный из сказанного выше, тогда C — точка пересечения окружности и прямой AC, и она лежит на прямой CD, на которой лежат E и F.

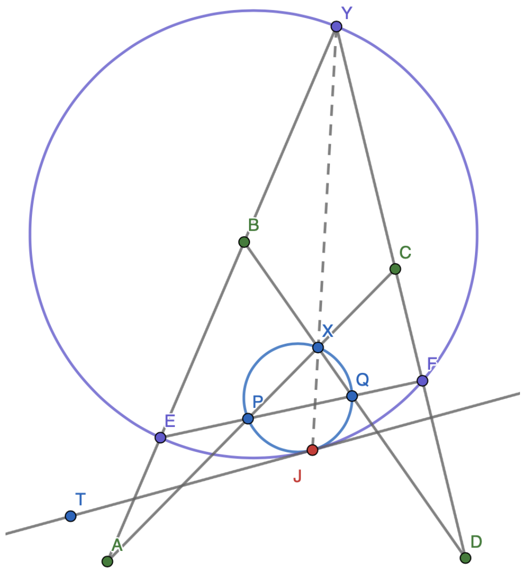
Аналогичным образом определим точку L — как пересечение окружности JDC и прямой BD, тогда точки E, K, L, F лежат на одной прямой, но тогда $K = P$ и $L = Q$, получили все точки из задачи.

Покажем, что $XPQJ$ — одна окружность, для этого проверим положения.

Первое положение: $P = A$, тогда $Q = B$, но мы уже знаем, что $ABXJ$ — одна окружность так как $YX \cdot YJ = YC \cdot YA$ из определения точки Y.

Второе положение: $P = C$, тогда $Q = D$ и аналогично $XPQL$ одна окружность.

Прейдем к доказательству того, что наши две окружности касаются в точке J. Проведем касательную в точке J к окружности $EYFJ$.



Тогда $\angle EJT = \angle EYJ = \angle EFJ$. Хотим, что бы $\angle EJY = \angle PXJ$.

Покажем это: $\angle EJX = \angle EAX = \angle BDC = \angle QJF \rightarrow \angle XQJ$ как внешний равен $\angle EFI + \angle FJQ = \angle PXJ$, а значит, наша прямая касается и окружности $JPXQ$.

7 Заключение

По итогам исследования мной был рассмотрен аппарат линейного движения, рассмотрены основные теоремы и леммы, необходимые для его использования в задачах. Получены результаты:

1) Сформулированы и доказаны базовые и вспомогательные теоремы и леммы.

2) Исследованы замечательные точки треугольника. Их вид движения (линейное или нелинейное) в зависимости от вида движения сторон и вершин треугольника.

3) Исследованы прямые Обера и Гаусса, их перпендикулярность в терминах линейного движения.

4) Аппарат линейного движения применен в геометрических задачах с олимпиад.

Данные результаты могу быть применены в доказательстве новых фактов из геометрии. В перспективе возможно рассмотрение концепции линейного движения в пространстве.

Список литературы

[1] Прояева И. В. и Сафарова А. Д. “Организация самостоятельной работы студентов по курсу «Преобразования плоскости и методы изображений»: учебно-методическое пособие”. В: (2017), с. 7—15.

[2] Плотникова Е.А. и Саженков А.Н. “О линейном движении геометрических объектов”. В: (2017), с. 70—73.

[3] Кружок в хамовниках. *Линейное движение*. URL: https://math.mosolymp.ru/upload/files/2024/khamovniki/10-geom/2023-10-24-Lineynoe-Dvizhenie-10-2.pdf. (accessed: 24.10.2023).

[4] Произволов В.В. *Сложный осенний Турнир Городов*. URL: https://turgor.ru/problems/31/os31sl.pdf. (accessed: 10.08.2024).