

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Лицей НИУ ВШЭ

Мусаев Михаил Сергеевич

Обобщение теоремы Эйлера на случайные графы

Индивидуальная выпускная работа лицеиста 10 класса
направления «Информатика, Инженерия и Математика»

Научный руководитель:
Чистопольская Анастасия Ильинична

Москва 2025

Содержание

1	Введение	3
2	Теоретическая Часть	4
2.1	Комбинаторика	4
2.2	Графы	5
2.3	Вероятности и графы	8
3	Результаты	9
3.1	Приложения	20
3.1.1	Описание и структура кода	20
3.1.2	Результаты моделирования	20
4	Заключение	22
5	Литература	24

1 Введение

В 1736 году Российский математик Леонард Эйлер положил начало теории графов, решив задачу о Кёнигсбергских мостах и сформулировав условия существования эйлера цикла — пути, проходящего по каждому ребру графа ровно один раз.

Спустя более двух столетий, в XX веке получили серьёзное развитие как теория случайных графов — начиная с фундаментальных работ Эрдёша и Реньи, — так и классическая теория эйлеровых графов, восходящая к трудам Эйлера. Однако пересечение этих направлений, а именно изучение вероятностных свойств эйлеровых графов в случайных моделях, долгое время оставалось практически неизученным.

Цель исследования: Изучить поведение эйлеровых и чётных графов в модели случайных графов $G(n, \frac{1}{2})$, оценить и установить точные формулы и асимптотику их количества, а также провести экспериментальное моделирование для подтверждения теоретических результатов.

Задачи исследования:

1. Изучить классическую теорему Эйлера для детерминированных графов.
2. Исследовать свойства случайных графов: связность, четность при заданных p в модели $G(n, p)$.
3. Найти и доказать формулу количества чётных графов на n вершинах.
4. Получить формулу числа эйлеровых графов и сравнить её с числом чётных графов.
5. Исследовать предельное соотношение между числом эйлеровых и чётных графов.
6. Построить нижние и верхние оценки для количества эйлеровых графов и соответствующих вероятностей.
7. Предложить конструктивные методы построения и счёта числа эйлеровых графов.
8. Провести эмпирическое моделирование с помощью Python для визуализации и анализа графиков функций.

Материалы исследования:

1. Классическая теория графов
2. Вероятностная модель Эрдёша–Реньи $G(n, p)$.
3. Ранее опубликованные результаты по подсчёту графов.
4. Программные средства моделирования.

Методы исследования:

1. Комбинаторный анализ графов и построение рекуррентных соотношений.
2. Асимптотические оценки и предельные переходы.
3. Компьютерное моделирование.
4. Сравнительный анализ теоретических формул и экспериментальных данных.

2 Теоретическая Часть

2.1 Комбинаторика

Теорема 1. Число способов выбрать подмножество четной мощности из изначального непустого множества A мощности n равно в точности 2^{n-1} . Формально, справедливо тождество:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

Аналогично, число способов выбрать подмножество нечетной мощности из изначального непустого множества A мощности n равно в точности 2^{n-1} . Формально, справедливо тождество:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

Доказательство. Рассмотрим биномиальные разложения:

$$(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$$

$$(1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot (-1)^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n \cdot C_n^n$$

Соответственно складывая и вычитая уравнения получим:

$$(1 + 1)^n + (1 - 1)^n = 2 \cdot (C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots)$$

$$(1 + 1)^n - (1 - 1)^n = 2 \cdot (C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots)$$

Для $n \geq 1$ получаем в первом случае:

$$2^n + 0^n = 2 \cdot (C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots)$$

$$\frac{2^n}{2} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

$$2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$$

И во втором:

$$2^n - 0^n = 2 \cdot (C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots)$$

$$\frac{2^n}{2} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

$$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

□

2.2 Графы

Определение 1. Граф - пара множеств $G = (V, E)$ где $E \subseteq [V]^2 = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j\}$ - множество всех неупорядоченных пар элементов множества V .

Вершина - элемент множества V . Ребро - элемент множества E .

Обозначим число вершин в графе как $|V|$ а число ребер как $|E|$ соответственно.

Ребро $\{v, u\}$ будем обозначать как vu и говорить, что vu - смежны. А два ребра назовем $e \neq f$ смежными, если у них есть общий конец.

Множество всех ребер из E при вершине v обозначим как $E(v)$.

Множество всех ребер конкретного графа H также обозначим как $E(H)$.

Далее и в работе будем подразумевать что детерминированный граф задан как $G = (V, E)$ где V - множество его вершин, а E - множество его ребер. Отметим, что в работе будут рассматриваться графы без петель и кратных ребер.

Определение 2. $G' = (V', E')$ подграф графа $G = (V, E)$, если и только $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq \{uv \in E \mid u, v \in V'\}$. Другими словами множество ребер подграфа является подмножеством множества инцидентных ребер вершин принадлежащих подграфу.

Определение 3. В графе вершина $v \in V$ инцидентна ребру $e \in E \iff v \in e$.

Определение 4. Полный граф - граф G такой что $\forall v, u \in V$ v, u смежны. Обозначим полный граф на n вершинах обозначим как G^n .

Определение 5. Пустой граф - граф G такой что $\forall v, u \in V$ $vu \notin E$. Обозначим пустой граф как $G = \emptyset$ вместо $G = (\emptyset, \emptyset)$.

Определение 6. Степень вершины $v \in V$ графа $G = (V, E)$ есть число инцидентных этой вершине ребер. Обозначим степень вершины $v \in V$ как $deg(v)$.

Теорема 2. Сумма степеней вершин графа $G = (V, E)$ равна удвоенному количеству ребер. Формально:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Доказательство. Зафиксируем пустой граф. Очевидно, что сумма всех степеней такого графа равна нулю (Определение 5). При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин чётна и равна удвоенному числу рёбер. \square

Следствие 2.1. Число вершин нечетной степени в графе четно.

Доказательство. Граф на V имеет $\frac{1}{2} \sum_{v \in V} deg(v)$ ребер, поэтому число $\sum_{v \in V} deg(v)$ - четно, значит число вершин нечетной степени не может быть нечетным, иначе же, нарушается четность. \square

Следствие 2.2. Число ребер в $G^n = \frac{n(n-1)}{2}$

Доказательство. В полном графе на $V : |V| = n$, по определению, $\forall v \in V$ $deg(v) = n - 1$ (Определение 4), таким образом $\sum_{v \in V} deg(v) = n(n - 1)$, откуда $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$. \square

Определение 7. Обозначим через \mathcal{G}_n множество всех неориентированных графов на n вершинах.

Теорема 3. \mathcal{G}_n - конечное множество. Более того $|\mathcal{G}_n| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Доказательство. Рассмотрим все неориентированные графы на n вершинах. Каждое ребро определяется парой различных вершин, а поскольку граф неориентированный, порядок вершин не важен.

Число таких возможных рёбер равно количеству пар из n вершин:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Каждое из этих рёбер либо присутствует в графе, либо нет, то есть существует два варианта для каждого ребра.

Следовательно, общее количество различных графов на n вершинах равно:

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Так как $\frac{n(n-1)}{2}$ — конечное число при любом натуральном n , то \mathcal{G}_n — конечное множество. □

Определение 8. Путём в графе $G = (V, E)$ назовём последовательность вершин

$$P = v_1 v_2 \cdots v_k$$

где каждое v_i и v_{i+1} соединены ребром.

Вершины v_1 и v_k соединены путем P и называются его концами.

Вершины v_2, v_3, \dots, v_{k-1} назовем внутренними вершинами пути P .

Длиной пути назовем число $|E'|$. Путь длины k обозначим как P^k . Также стоит отметить, что k может быть равно нулю, тогда $P^0 = G^1$

Определение 9. Если $P = v_1, \dots, v_k$ - путь длины $k \geq 3$, то путь $C = v_1, \dots, v_k, v_1$ - называется циклом или/также замкнутым путем.

Длиной цикла назовем число его ребер.

Назовем цикл длины k k -циклом и обозначим как C^k .

Определение 10. Связный граф - непустой граф, такой что $\forall v, u \in V \exists$ путь $P = (V' \subset V, E' \subset E) : V' = \{v, \dots, u\}$. Другими словами, между двумя вершинами существует путь.

Определение 11. Компонента связности - максимальный (по включению) связный подграф исходного графа.

Другими словами подграф $U = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ называется компонентой связности, если $\forall v, u \in V' \exists$ подграф (путь) $P = \{v, \dots, u\} : P \subseteq U$, то есть лежащий целиком в U . А также выполняется условие максимальности, то есть $\nexists U'' = (V'', E'') : U' \subset U''$ и U'' связан.

Теорема 4. Граф $G = (V, E)$ связан если и только G содержит одну единственную компоненту связности.

Доказательство. Докажем в обе стороны:

Необходимость: пусть граф G связан. Тогда для любых двух вершин $u, v \in V$ существует путь из u в v (Определение 10). Предположим, что в графе более одной компоненты связности. Тогда найдутся вершины u и v , принадлежащие разным компонентам, между которыми не существует пути, что противоречит связности графа.

Достаточность: пусть граф G имеет единственную компоненту связности. Тогда, любые две вершины графа соединены путем (Определение 11), то есть граф связан. \square

Определение 12. Дополнением графа $G = (V, E)$ назовем граф $\bar{G} = (V, \bar{E})$ на том же множестве вершин, такой что $E \cap \bar{E} = \emptyset$ и граф $(V, E \cup \bar{E}) = G^n$, то есть является полным.

Определение 13. Назовем граф четным если все степени его вершин четны. Более формально $G = (V, E)$ - четный если и только $\forall v \in V \deg(v) \equiv 0 \pmod{2}$

Определение 14. Дерево - связный граф без циклов.

Теорема 5. Дерево на n вершинах содержит $n - 1$ ребро.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по числу вершин n .

1. База индукции при $n = 1$ дерево состоит из одной вершины и не содержит рёбер. Действительно, $1 - 1 = 0$, верно.
2. Предположим, что любое дерево с k вершинами содержит ровно $k - 1$ ребро. Докажем, что дерево с $k + 1$ вершинами содержит k рёбер.
3. Рассмотрим дерево T с $k + 1$ вершинами. Предположим, что в нём нет листьев, то есть каждая вершина имеет степень как минимум 2.

Построим простой путь максимальной длины в этом дереве:

$$v_0 - v_1 - \dots - v_\ell$$

Так как T не содержит циклов (Определение 14), этот путь нельзя продолжить без повторения вершин. Тогда его концы v_0 и v_ℓ могут быть инцидентны только одному ребру — иначе путь можно было бы продолжить. Тогда степени этих вершин равны 1, что противоречит предположению.

Следовательно, в дереве существует хотя бы один лист.

4. Рассмотрим дерево T с $k + 1$ вершинами. Рассмотрим один произвольный лист и удалим его и инцидентное ему ребро — получится граф T' , который всё ещё является деревом (он остаётся связным и без циклов), но уже с k вершинами.

По предположению индукции, в T' ровно $k - 1$ ребро. При добавлении удалённого листа и одного ребра, получаем k рёбер в T .

Таким образом, дерево с $k + 1$ вершинами содержит k рёбер.

По индукции, утверждение верно для всех $n \geq 1$. \square

Теорема 6. Если граф $G = (V, E)$ связан, то граф содержит хотя бы $n - 1$ ребер. ($n = |V|$).

Доказательство. Рассмотрим связный граф G с n вершинами. Пусть в G содержится минимальное возможное количество рёбер среди всех связных графов на n вершинах.

Тогда этот граф не содержит циклов, иначе можно удалить ребро из цикла, и граф останется связным — что противоречит минимальности.

Значит, G — дерево (Определение 14), и оно содержит ровно $n - 1$ ребро (Теорема 5).

А раз любой связный граф либо является деревом и содержит $n - 1$ ребро, либо содержит циклы, и тогда число рёбер больше $n - 1$, то минимальное количество рёбер в связном графе равно $n - 1$. \square

Определение 15. *Эйлеров путь в графе $G = (V, E)$ — это путь, который проходит по каждому ребру графа ровно один раз.*

Определение 16. *Эйлеров цикл — это эйлеров путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают.*

Определение 17. *Эйлеров граф - связный граф, содержащий эйлеров цикл.*

Теорема 7. *(Л. Эйлер, 1736) $G = (V, E)$ - эйлеров если и только G - связен, $\forall v \in V \deg(v) \equiv 0 \pmod{2}$*

Доказательство. Докажем в обе стороны.

Необходимость: Допустим в графе существует вершина с нечетной степенью. Рассмотрим эйлеров обход графа. Заметим, что при попадании в вершину и при выходе из нее мы уменьшаем ее степень на два (помечаем уже пройденные ребра), если эта вершина не является стартовой (она же конечная для цикла). Для стартовой (конечной) вершины мы уменьшаем ее степень на один в начале обхода эйлерова цикла, и на один при завершении. Следовательно вершин с нечетной степенью быть не может. Наше предположение неверно.

Достаточность: Докажем достаточность методом математической индукции по числу вершин n .

1. База индукции $n = 0$. (нулевой) цикл существует.
2. Предположим что граф имеющий менее n вершин содержит эйлеров цикл.
3. Рассмотрим связный $G = (V, E)$ с $n > 0$ вершинами:
 - (a) Пусть $v, u \in V$ — вершины графа. Поскольку граф связный, то существует путь из v в u . Степень u — чётная, значит существует неиспользованное ребро, по которому можно продолжить путь из u . Так как граф конечный, то путь, в конце концов, должен вернуться в v , следовательно мы получим замкнутый путь (цикл). Назовем этот цикл C_1 . Будем продолжать строить C_1 через v таким же образом, до тех пор, пока мы в очередной раз не сможем выйти из вершины v , то есть C_1 будет покрывать все ребра, инцидентные v . Если C_1 является эйлеровым циклом для G , тогда доказательство закончено.
 - (b) Если нет, то пусть G' — подграф графа G , полученный удалением всех рёбер, принадлежащих C_1 . Поскольку C_1 содержит чётное число рёбер, инцидентных каждой вершине, то каждая вершина подграфа G' имеет чётную степень. А так как C_1 покрывает все ребра, инцидентные v , то граф G' будет состоять из нескольких компонент связности.
 - (c) Рассмотрим какую-либо компоненту связности G' . Поскольку рассматриваемая компонента связности G' имеет менее, чем n вершин, а у каждой вершины графа G' чётная степень, то у каждой компоненты связности G' существует эйлеров цикл. Пусть для рассматриваемой компоненты связности это цикл C_2 . У C_1 и C_2 имеется общая вершина a , так как G связен. Теперь можно обойти эйлеров цикл, начиная его в вершине a , обойти C_1 , вернуться в a , затем пройти C_2 и вернуться в a . Если новый эйлеров цикл не является эйлеровым циклом для G , продолжаем использовать этот процесс, расширяя наш эйлеров цикл, пока, в конце концов, не получим эйлеров цикл для G .

□

2.3 Вероятности и графы

Определение 18. *В работе будет использоваться случайные графы в модели Эрдеша-Реньи. Опишем ее (Более подробное описание вероятностной модели присутствует в [2] с. 32 - 34):*

Пусть дано множество $V_n = \{1, \dots, n\}$, элементы которого мы назовем вершинами. Будем считать, что возможное число ребер $\in [0; E(G^n) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}]$ ввиду отсутствия петель и кратных ребер. (Определение 1)

Будем соединять любые две вершины $v, u \in V_n$ ребром с некоторой вероятностью $p \in [0, 1]$ независимо от всех остальных $C_n^2 - 1$ пар вершин. Иными словами, ребра появляются в соответствии со стандартной схемой Бернулли, в которой C_n^2 испытаний и «вероятность успеха» p . Стоит отметить что такая конструкция остается случайной так как ребра появляются независимо ввиду более фундаментальной концепции испытаний Бернулли - конструкция случайного графа G эквивалентна последовательности из C_n^2 независимых испытаний Бернулли, где каждое ребро появляется независимо с вероятностью p . (Более подробное описание «Схемы испытаний Бернулли» можно найти в [2] с. 8 - 11).

Случайный граф обозначим как $G = (n, p)$ где n - количество вершин в графе, а p - вероятность «успеха» в терминологии испытаний Бернулли, то есть вероятность возникновения произвольного ребра.

Теорема 8. (П. Эрдьёш и А. Реньи 1961) Рассмотрим модель $G(n, p)$. Пусть $p = \frac{c \cdot \ln n}{n}$.

1. Если $c > 1$, то асимптотически почти верно что граф связан.
2. Если $c < 1$, то асимптотически почти верно что случайный граф не является связным.

Доказательство. Полное доказательство см. в [2] с. 42 - 28. □

3 Результаты

Определение 19. Введём функцию $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где для каждого натурального числа n значение $g(n)$ обозначает это число четных графов на n вершинах.

Теорема 9.¹ Для $G = (n, \frac{1}{2})$ $g(n) = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$

Доказательство. Нас интересует количество графов, в которых степени всех вершин чётны. Построим такие графы по следующему алгоритму:

Для каждой очередной вершины v_i из V будем выбирать подмножество из вершин $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, с которыми она будет соединена. Далее, нужно выбрать подмножество мощности из $n - i$ возможных соседей такой четности, чтобы степень вершины v_i была четной на момент рассмотрения вершины v_{i+1} . Рассмотрим два возможных случая:

1. Степень вершины v_i чётна на момент её рассмотрения. В таком случае необходимо чтобы четность подмножество множества $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ была также чётной.
2. Степень вершины v_i нечётна на момент её рассмотрения. В таком случае необходимо чтобы четность подмножество множества $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ была уже нечётной.

И в том, и в другом случае подмножеств ровно половина от всех, то есть $\frac{2^{n-i}}{2} = 2^{n-i-1}$. (Теорема 1).

¹Аналогичная формула встречалась в [5], где автор привёл другое доказательство.

Последняя вершина v_n не участвует в выборе рёбер. Её степень определяется выбором предыдущих рёбер. Поскольку сумма степеней всех вершин всегда чётна (Теорема 2), и если $n - 1$ вершин уже имеют чётные степени, то степень последней вершины также обязана быть чётной.

Таким образом, общее число чётных графов на n вершинах равно:

$$\prod_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} = 2^{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i-1)}.$$

Вычислим сумму в показателе степени:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i-1) = \sum_{k=0}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Таким образом, искомое количество графов:

$$2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}.$$

□

Следствие 9.1. Граф $G = (n, \frac{1}{2})$ чётный с вероятностью $(\frac{1}{2})^{n-1}$

Доказательство. В модели $G(n, \frac{1}{2})$ все графы на n вершинах равновероятны, и общее количество таких графов равно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (Теорема 3).

Число чётных графов среди них равно $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. Следовательно, искомая вероятность:

$$\mathbb{P}(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный}) = \frac{g(n)}{|\mathcal{G}_n|} = \frac{2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

$$P = \frac{2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 2^{\frac{(n-1)(n-2) - n(n-1)}{2}} = 2^{-\frac{n-1}{2}(n-(n-2))} = 2^{-(n-1)}.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}(G - \text{чётный}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

□

Определение 20. Введём функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где для каждого натурального числа n значение $f(n)$ обозначает это число эйлеровых графов на n вершинах.

Определение 21. Введём функцию $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{G}_n)$, где

$$F(n) = \{G \in \mathcal{G}_n \mid G - \text{эйлеров граф}\}.$$

Теорема 10. При $n \equiv 1 \pmod{2}$, для любого чётного графа $G = (V, E)$ хотя бы один из графов G или его дополнение \bar{G} будет эйлеровым.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. Если граф G связан, то утверждение теоремы выполнено — G сам является связным и четным, а значит и эйлеровым.
2. Пусть теперь граф G не связан. Разобьём G на компоненты связности C_1, C_2, \dots, C_k , где $k \geq 2$ (Теорема 4). Докажем, связность и четность \overline{G} :

Связность:

- (а) Вершины из разных компонент C_i и C_j :

В G между ними нет рёбер, поэтому в \overline{G} все такие вершины соединены рёбрами. Например, для $u \in C_i$ и $v \in C_j$ ребро uv есть в \overline{G} .

- (б) Вершины из одной компоненты C_i :

В G существует путь между ними, но в \overline{G} рёбра внутри C_i отсутствуют. Однако для любых $u, v \in C_i$ выберем вершину w из другой компоненты C_j ($j \neq i$). В \overline{G} есть рёбра uw и wv , поэтому путь $u \rightarrow w \rightarrow v$ существует.

Таким образом, между любыми $v, u \in V \exists P$ в \overline{G} а значит по Теореме 3 \overline{G} связан.

Чётность:

- (а) Рассмотрим произвольную вершину $v_i \in V$, тогда в $G \deg(v_i) \equiv 0 \pmod{2} = 2m$ для некоторого натурального m .
- (б) Теперь рассмотрим степень вершины в \overline{G} : $\deg_{\overline{G}}(v_i) = n - 1 - 2m \equiv 0 \pmod{2}$ потому что $(n - 1) \equiv 0 \pmod{2}$ при $n \equiv 1 \pmod{2}$.

Таким образом, в обоих случаях степень произвольной вершины v_i - чётная.

Тогда, в любом случае хотя бы один из графов G или \overline{G} является эйлеровым (Теорема 7). □

Теорема 11. *Хотя бы половина четных графов $G = (V, E)$ на множестве $|V| = n$ вершин являются эйлеровыми. Более формально:*

$$f(n) \in \left[2^{\frac{n(n-3)}{2}}; 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \right] \text{ для } n \equiv 1 \pmod{2}$$

Доказательство. Всего существует $g(n) = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ графов на n вершинах (Теорема 9). Разобьём их на пары вида (G, \overline{G}) , где \overline{G} — дополнение G .

Так как $\overline{\overline{G}} = G$ и $G \neq \overline{G}$ при $n \geq 2$, количество таких пар равно $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1}$.

В каждой паре хотя бы один граф связан (Теорема 10). Если бы связанных графов было меньше половины, то существовала бы пара (G, \overline{G}) с двумя несвязными графами, что противоречит теореме (Теорема 10).

Следовательно, связанных графов на n вершинах не менее $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1} = 2^{\frac{n(n-3)}{2}}$. □

Следствие 11.1. $\mathbb{P}(G = (V, E) - \text{эйлеров}) \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n; \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right]$ для $n \equiv 1 \pmod{2}$

Доказательство. Всего $2^{C_n^2}$ графов на n вершинах (Теорема 3). Чётных среди них $g(n) = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ (Теорема 9), а по только что доказанной теореме $f(n) \in \left[\frac{g(n)}{2}, g(n) \right]$.

Тогда:

$$\mathbb{P}(G \text{ — эйлеров}) = \frac{f(n)}{2C_n^2} \in \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2C_{n-1}^2}{2C_n^2}, \frac{2C_{n-1}^2}{2C_n^2} \right] = \left[2^{-n}, 2^{-(n-1)} \right] = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n ; \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]$$

□

Теорема 12. Пусть $G = (V, E)$ — эйлеров граф с $|V| = n \geq 2$. Тогда для любого ребра $uv \in E$ граф $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\})$ — эйлеров.

Доказательство. Построим $G' = (V', E')$ следующим образом:

1. Добавим новую вершину w : $V' = V \cup \{w\}$
2. Удалим ребро uv : $E'' = E \setminus \{uv\}$
3. Добавим два новых ребра: $E' = E'' \cup \{uw, vw\}$

Докажем эйлеровость G' :

1. Чётность степеней

- (a) Для $\forall x \in V \setminus \{u, v\}$: $\deg_{G'}(x) = \deg_G(x) \equiv 0 \pmod{2}$
- (b) Для вершины u : $\deg_{G'}(u) = \deg_G(u) - 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$
- (c) Для вершины v : $\deg_{G'}(v) = \deg_G(v) - 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$
- (d) Для вершины w : $\deg_{G'}(w) = 2 \equiv 0 \pmod{2}$

2. Связность

- (a) В G существует путь P между любыми $x, y \in V$, так как G связан. (Теорема 4)
- (b) Если P не содержит uv , он остаётся в G'
- (c) Если P содержит uv , заменим ребро uv на путь $u \rightarrow w \rightarrow v$
- (d) Для новой вершины w : $\forall x \in V$ путь $x \rightarrow u \rightarrow w$ или $x \rightarrow v \rightarrow w$ существует

3. Сохранение свойств

- (a) $|V'| = n + 1$, $|E'| = |E| - 1 + 2 = |E| + 1$ по построению
- (b) Все степени чётны (по пункту 1)
- (c) Граф связан (по пункту 2)

Следовательно, G' — эйлеров (Теорема 7), а значит теорема доказана. □

Следствие 12.1. Для любого $n \geq 2$ верно:

$$f(n) \geq \sum_{G=(V,E) \in F(n-1)} |E|$$

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим произвольный эйлеров граф $G_i = (V_i, E_i)$ на $n - 1$ вершинах. (Теорема 7):

1. G_i связан
2. $\forall v \in V_i \deg(v) \equiv 0 \pmod{2}$

Для каждого ребра $e = uv \in E_i$ выполним описанный выше алгоритм (Теорема 12), тогда полученный граф G_i^e будет эйлеровым.

Докажем инъективность отображения:

1. Для фиксированного G_i разные рёбра $e_1 \neq e_2$ порождают разные графы $G_i^{e_1} \neq G_i^{e_2}$, так как отличаются множествами рёбер
2. Для разных исходных графов $G_i \neq G_j$ образы G_i^e и $G_j^{e'}$ различны.

Таким образом, каждое ребро каждого эйлерова графа на $n - 1$ вершинах порождает уникальный эйлеров граф на n вершинах. А значит справедливым будет неравенство следствия. \square

Следствие 12.2. *Справедлива оценка для $n \geq 2$:*

$$f(n) \geq (n - 2) \cdot f(n - 1)$$

Доказательство. Эйлеров граф на $n - 1$ вершине содержит хотя бы $n - 2$ ребра (Теорема 6), и для каждого из них можно провести алгоритм, описанный выше (Теорема 12), таким образом хотя бы для каждого из $n - 2$ ребер эйлерова графа на $n - 1$ вершине будет существовать хотя бы один эйлеров граф на n вершинах, более формально:

$$f(n) \geq (n - 2) \cdot f(n - 1)$$

\square

Теорема 13. *Пусть $G = (V, E)$ – эйлеров граф с $|V| = n \geq 2$. Тогда для любой пары несмежных вершин $u, v \in V$ граф $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{uw, vw, uv\})$ – эйлеров.*

Доказательство. Построим $G' = (V', E')$ следующим образом:

1. Добавим новую вершину w : $V' = V \cup \{w\}$
2. Добавим три новых ребра: $E' = E \cup \{uw, vw, uv\}$

Докажем эйлеровость G' :

1. Чётность степеней

(a) Для $\forall x \in V \setminus \{u, v\}$: $\deg_{G'}(x) = \deg_G(x) \equiv 0 \pmod{2}$

(b) Для вершины u : $\deg_{G'}(u) = \deg_G(u) + 2 \equiv 0 \pmod{2}$

(c) Для вершины v : $\deg_{G'}(v) = \deg_G(v) + 2 \equiv 0 \pmod{2}$

(d) Для вершины w : $\deg_{G'}(w) = 2 \equiv 0 \pmod{2}$

2. Связность

(a) В G существует путь P между любыми $x, y \in V$, так как G связан (Теорема 4)

(b) Для новой вершины w : $\forall x \in V$ путь $x \rightarrow u \rightarrow w$ или $x \rightarrow v \rightarrow w$ существует

3. Сохранение свойств

(a) $|V'| = n + 1$, $|E'| = |E| + 3$ по построению

(b) Все степени чётны (по пункту 1)

(c) Граф связан (по пункту 2)

Следовательно, G' - эйлеров (Теорема 7), а значит теорема доказана. \square

Следствие 13.1. Для любого $n \geq 2$ верно:

$$f(n) \geq \sum_{G=(V,E) \in F(n-1)} |\bar{E}| = \sum_{G=(V,E) \in F(n-1)} \frac{(n-1)(n-2)}{2} - |E|$$

Доказательство. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим произвольный эйлеров граф $G_i = (V_i, E_i)$ на $n - 1$ вершинах. (Теорема 7):

1. G_i связан
2. $\forall v \in V_i \deg(v) \equiv 0 \pmod{2}$

Для каждой пары несмежных вершин $e = vu \notin E$ выполним описанный выше алгоритм (Теорема 13), тогда полученный граф G_i^e будет эйлеровым.

Докажем инъективность отображения:

1. Для фиксированного G_i разные пары несмежных вершин $e_1 \neq e_2$ порождают разные графы $G_i^{e_1} \neq G_i^{e_2}$, так как отличаются множествами рёбер.
2. Для разных исходных графов $G_i \neq G_j$ образы G_i^e и G_j^e различны.

Таким образом, каждая пара несмежных вершин каждого эйлерова графа на $n - 1$ вершинах порождает уникальный эйлеров граф на n вершинах. А значит справедливым будет неравенство следствия. \square

Теорема 14. $f(n) \geq f(n - 1) \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Доказательство. Рассмотрим произвольный эйлеров граф G на $n - 1$ вершине. Добавим новую вершину w и для каждой пары вершин $v, u \in V$ объединим идеи из предыдущих теорем (Теорема 12 и Теорема 13):

1. Если $vu \in E$, то выполним алгоритм, описанный в Теорема 12 , и получим $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw, vw\})$ - эйлеров.
2. Иначе если $vu \notin E$, выполним алгоритм, описанный в Теорема 13 , и получим $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{uw, vw, uv\})$ - эйлеров.

Таким образом, для любой пары вершин $v, u \in V$ изначального эйлерова графа G можно построить эйлеров граф G' , всего пар вершин $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, тогда справедливо неравенство:

$$f(n) \geq f(n - 1) \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$$

\square

Теорема 15. $f(n)$ - строго возрастает при $n \geq 2$.

Доказательство. $f(n) \geq f(n - 1) \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (Теорема 14).

1. Случай при $n = 2$ рассмотрим отдельно: имеем множитель $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ и $f(2) = 0$ и $f(3) = 1$, а значит и верно неравенство:

$$1 > 0 \cdot 1$$

2. А при $n \geq 3$ имеем множитель строго больший единицы ($\frac{n(n-1)}{2}$ возрастает, значит минимум при $n \geq 3$ достигается в $n = 3$, то есть $\frac{3(3-1)}{2} = 3$), таким образом:

$$\text{при } c \mid c > 1 \quad f(n) \geq c \cdot f(n-1) \Rightarrow f(n) > f(n-1)$$

Таким образом при всех $n \geq 2$, $f(n)$ – строго возрастает. □

Теорема 16. $f(n) \in \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{g(n-1)}{2}, \frac{2 \cdot g(n+1)}{n(n-1)} \right]$ для $n \equiv 0 \pmod{2}$

Доказательство. Нижняя граница следует из Теорема 14 и оценки $f(n-1) \geq \frac{f(n-1)}{2}$ для нечётного $n-1$.

Верхняя – из той же теоремы, переписанной как $f(n-1) \leq \frac{2f(n)}{(n-1)(n-2)}$, и оценки $f(n+1) \geq f(n) \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow f(n) \leq \frac{2f(n+1)}{n(n-1)}$. □

Следствие 16.1. $\mathbb{P}(G = (V, E) \text{ – эйлеров}) \in \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \frac{2}{n(n-1)} \right]$ для $n \equiv 0 \pmod{2}$

Доказательство. Переходим от чисел к вероятностям:

Имеем неравенство (Теорема 15):

$$f(n-1) < f(n) < f(n+1)$$

Более того (Теорема 14):

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot f(n-1) < f(n) < \frac{2f(n+1)}{n(n-1)}$$

Тогда для вероятностей справедлива будет оценка:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G = (V, E)) \text{ – эйлеров} &\in \left[\frac{g(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{1}{2C_n^2}, \frac{2 \cdot g(n+1)}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2C_n^2} \right] \\ \mathbb{P}(G = (V, E)) \text{ – эйлеров} &\in \left[2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}, \frac{2 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right] \\ \mathbb{P}(G = (V, E)) \text{ – эйлеров} &\in \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \frac{2}{n(n-1)} \right] \end{aligned}$$

□

Теорема 17.² Число $f(n)$ количества эйлеровых графов удовлетворяет соотношению:

$$f(n) = g(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot f(k) \cdot g(n-k)$$

²Аналогичная формула встречалась в [5], где автор привёл другое доказательство.

Доказательство. Заметим, что, чтобы посчитать количество эйлеровых графов на n вершинах, достаточно знать количество четных графов на n вершинах и количество несвязных четных графов на n вершинах, ведь тогда достаточно вычесть одно из другого и получить количество эйлеровых графов на n вершинах.

Число четных графов на n вершинах = $g(n)$ (Теорема 9), теперь посчитаем число несвязных четных графов:

Чтобы граф был несвязен, он должен содержать хотя бы две компоненты связности (Теорема 4). Посчитаем количество несвязных графов на n вершинах:

1. Зафиксируем одну произвольную вершину, скажем v_1 , - назовем её опорной. Не умаляя общности скажем, что если v_1 принадлежит компоненте, то отдельно компонента - эйлеров граф.
2. Разобьем все графы на группы $1, 2, \dots, n-1$ - $G = (V, E)$ принадлежит группе k если и только размер компоненты в которую входит опорная вершина равен k .

Очевидно что группы не пересекаются, тогда достаточно посчитать количество графов, принадлежащих каждой группе и далее просуммировать:

- (a) Всего таких компонент размера k может быть $f(k)$, а выбрать такую можно C_{n-1}^{k-1} способами (Ввиду того что v_1 уже принадлежит компоненте).
- (b) Далее, для каждой компоненты из пункта (a) посчитаем число четных графов на оставшихся $n-k$ вершинах, таких $g(n-k)$.
- (c) Итого общее число несвязных графов принадлежащих группе k на множестве из n элементов:

$$C_{n-1}^{k-1} \cdot f(k) \cdot g(n-k)$$

- (d) Просуммировав по всем $1 \leq k \leq n-1$ получим:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot f(k) \cdot g(n-k)$$

Заметим, что $C_{n-1}^{k-1} = C_n^k \cdot \frac{k}{n}$, тогда для всех $n \geq 1$ число эйлеровых графов на n вершинах равно:

$$f(n) = g(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot f(k) \cdot g(n-k)$$

□

Теорема 18. Для функций $f(n)$ и $g(n)$ выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot f(k) \cdot g(n-k)}{g(n)} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot \frac{f(k) \cdot g(n-k)}{g(n)} =$$

Заменим $f(k)$ на $g(k)$ так как $f(k) \leq g(k)$ (Теорема 11):

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot \frac{g(k) \cdot g(n-k)}{g(n)}$$

Распишем отдельно дробь $\frac{g(k) \cdot g(n-k)}{g(n)}$:

$$\frac{g(k) \cdot g(n-k)}{g(n)} = \frac{2^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \cdot 2^{\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2}}}{2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}} = 2^{\frac{(k-1)(k-2)}{2} + \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}} = 2^{-k(n-k)+1}$$

И получим:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

Далее выпишем отдельно от суммы ее слагаемые при $k = 1$ и $k = n - 1$:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot C_n^1 \cdot 2^{-1(n-1)+1} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot C_n^{n-1} \cdot 2^{-(n-1)(n-n+1)+1} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C_n^1 \cdot 2^{-(n-1)+1} + C_n^{n-1} \cdot 2^{-(n-1)+1} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

Заменяем $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n+2} + n \cdot 2^{-n+2} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot 2^{-n+2} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

По свойству пределов:

$$1 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)}{2^n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

Рассмотрим отдельно первый предел и по правилу Лопиталья:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+4}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+4)'}{(2^n)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\ln(2) \cdot 2^n} = 0$$

Тогда предел примет следующий вид:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} k \cdot C_n^k \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

Заметим, что $k \cdot C_n^k \leq n \cdot 2^n$ при $k \in [2; n-2]$:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} n \cdot 2^n \cdot 2^{-k(n-k)+1}$$

Оценим показатель степени $-k(n-k)+1$ - рассмотрим функцию $h(k) = k(n-k)$ на отрезке $[2; n-2]$:
Найдем экстремумы функции:

$$h'(k) = (kn - k^2)'_k = n - 2k = 0 \text{ или } \exists \text{ при } k = \frac{n}{2}$$

Из знака производной:

- для $k < \frac{n}{2}$ имеем $h(k) > 0$, то есть $h(k)$ возрастает на $[2; \frac{n}{2}]$
- для $k > \frac{n}{2}$ имеем $h(k) < 0$, то есть $h(k)$ убывает на $[\frac{n}{2}; n-2]$

А значит минимальные значения функции $h(k)$ на $[2; n-2]$: достигаются на ее границах, а именно при $k = 2$ и $k = n-2$. Подставим, найдем минимальные значения:

- при $k = 2$ имеем $h(2) = 2(n-2)$
- при $k = n-2$ имеем $h(n-2) = (n-2)(n-n+2) = 2(n-2)$

А значит справедливо неравенство на отрезке $[2; n-2]$:

$$k(n-k) \geq 2(n-2)$$

Домножим на -1 обе части, поменяв знак неравенства, а также добавим к обоим частям 1:

$$-k(n-k) + 1 \leq -2(n-2) + 1$$

Таким образом слагаемое $2^{-k(n-k)+1}$ можно оценить сверху как $2^{-2(n-2)+1}$:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} n \cdot 2^n \cdot 2^{-2(n-2)+1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot n \cdot n \cdot 2^{n-2n+4+1} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 2^{-n+5} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32n}{2^n}$$

И далее по правилу Лопиталья:

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32n}{2^n} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(32n)'}{(2^n)'} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32}{\ln(2) \cdot 2^n} = 1$$

□

Следствие 18.1. При $n \rightarrow \infty$ выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(G(n, \frac{1}{2}) - \text{эйлеров})}{\mathbb{P}(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный})} = 1$$

Доказательство. Посчитаем отдельно, сначала вероятность того, что в модели $G(n, \frac{1}{2})$ случайный граф четный, как отношение числа благоприятных исходов (число четных графов (Теорема 9)) и числа всех возможных исходов (число всех графов (Теорема 3)):

$$\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный} \right) = \frac{g(n)}{2^{C_n^2}}$$

Аналогично, вероятность того, что в модели $G(n, \frac{1}{2})$ случайный граф эйлеров:

$$\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{эйлеров} \right) = \frac{f(n)}{2^{C_n^2}}$$

Тогда, их отношение:

$$\frac{\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{эйлеров} \right)}{\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный} \right)} = \frac{\frac{f(n)}{2^{C_n^2}}}{\frac{g(n)}{2^{C_n^2}}} = \frac{f(n)}{g(n)}$$

Тогда, по только что доказанной теореме (Теорема 18), предел их отношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{эйлеров} \right)}{\mathbb{P} \left(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

□

3.1 Приложения

3.1.1 Описание и структура кода

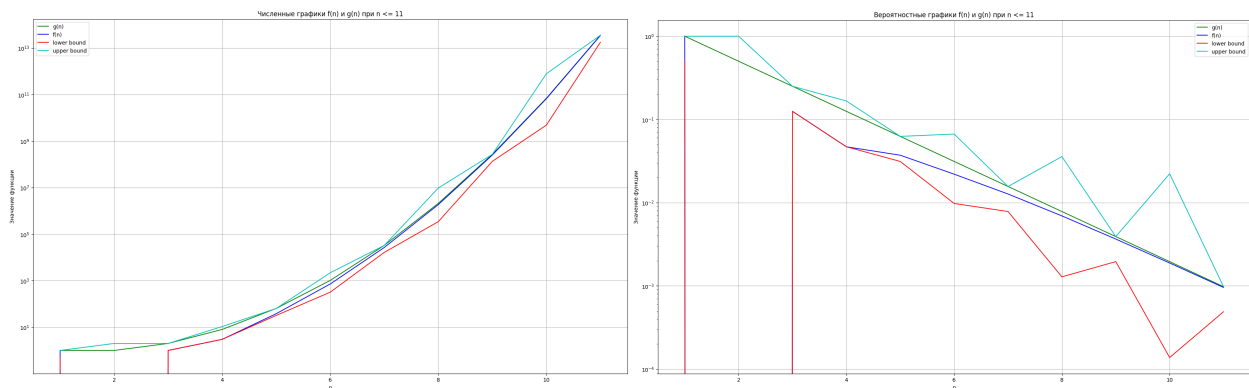
Реализация алгоритмов для подсчёта числа эйлеровых и четных графов и визуализации результатов выполнена на языке Python с использованием библиотеки *matplotlib*. Полный код доступен по ссылке: https://colab.research.google.com/drive/1n5Zn4Dk0Ix1_jyH4P1nhWxiW0y-V-ftZ?usp=sharing.

Код состоит из следующих основных частей:

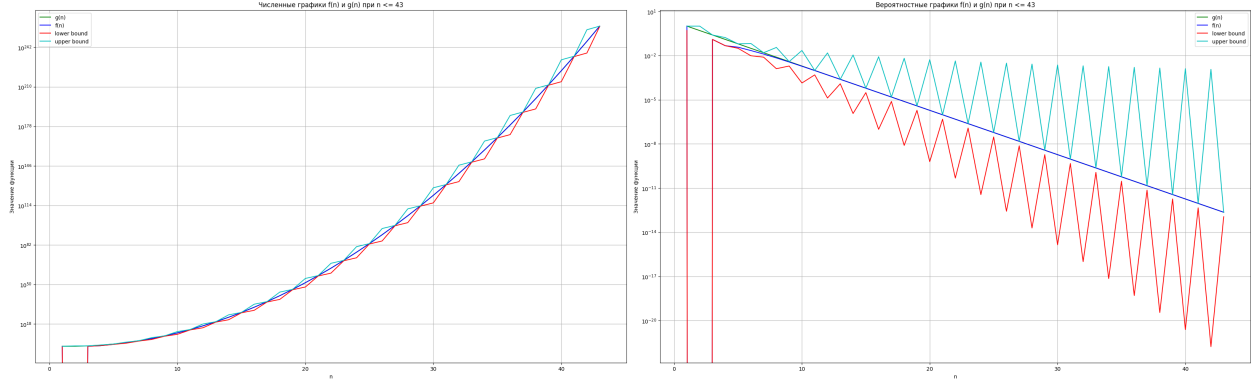
1. Ввод максимального числа вершин x , до которого будут посчитаны функции.
2. Предсчет массива *factorial* | $factorial[i] = i!$ и декларация функции C_n^k .
3. Основной подсчет числа эйлеровых графов по рекуррентной формуле в которой:
 - Считается массив *dp* | $dp[i] = f(i)$, то есть число эйлеровых графов на i вершинах. Далее назовем этот массив *f_values*.
 - Считается массив *g_values* | $g_values[i] = g(i)$, то есть число чётных графов на i вершинах.
4. Далее в зависимости от цели, можно запустить один из двух блоков кода:
 - Первый из которых запускается в том случае, если наша цель - построить вероятностный график (будут отображены вероятности того что граф - эйлеров, четный, а также нижние и верхние оценки из следствий теорем (Теорема 11 и Теорема 16). В легенде обозначены как: *f(n)*, *g(n)*, *lower bound*, *upper bound* соответственно).
 - Второй из которых запускается в том случае, если наша цель - построить численный график. (будут отображены количества эйлеровых и четных графов, а также нижние и верхние оценки из теорем (Теорема 11 и Теорема 16). В легенде обозначены как: *f(n)*, *g(n)*, *lower bound*, *upper bound* соответственно).
5. Корректировка размеров массивов (для корректной работы функций библиотеки *matplotlib*) и их вывод.
6. Моделирование графиков.

3.1.2 Результаты моделирования

Ниже представлены примеры визуализаций, полученных в результате запуска кода:



Проанализируем графики:



1. Рассмотрим первую пару графиков при $n \leq 11$:

При малых n заметно значительное различие между функциями $f(n)$ и $g(n)$. Однако по мере увеличения n графики $f(n)$ и $g(n)$ начинают стремительно сближаться, что указывает на уменьшение доли несвязных графов среди графов с чётными степенями. Такое поведение подтверждает теоретический результат о $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Также наблюдается адекватность предложенных оценок: нижняя и верхняя оценки (красная и голубая линии соответственно) корректно ограничивают истинные значения функции $f(n)$, демонстрируя высокую точность даже при малых n .

2. Рассмотрим вторую пару графиков при $n \leq 43$:

Различие между функциями $f(n)$ и $g(n)$ становится практически незаметным — графики полностью сливаются, что говорит о том, что почти все графы с чётными степенями становятся связными. Это дополнительно подтверждает теоретический результат о $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Интересное наблюдение связано с качеством оценок: для чётных и нечётных n поведение оценки немного различается. Особенно заметно, что для нечётных n верхняя и нижняя оценки дают более точное приближение к реальному значению $f(n)$. Для чётных n точность оценок также высока, но наблюдаются небольшие отклонения.

Кроме того, важно отметить, что при $n \geq 30$ значения функций достигают порядка 10^{200} и выше, однако логарифмическое масштабирование осей позволяет сохранять наглядность и сравнимость всех функций и оценок.

4 Заключение

В настоящей работе мы сосредоточились на теоретическом и экспериментальном изучении эйлеровых и чётных графов в модели $G(n, \frac{1}{2})$. Основными результатами стали:

- После завершения исследования, мы обнаружили, что формула количества четных графов (Теорема 9):

$$g(n) = 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

была уже получена ранее ([5] с. 22), однако мы смогли предложить альтернативный и более конструктивный способ доказательства, который представляет собой отдельный научный интерес.

- После завершения исследования, мы обнаружили, что формула числа эйлеровых графов (Теорема 17):

$$f(n) = g(n) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot C_n^k \cdot f(k) \cdot g(n-k)$$

была уже получена ранее ([5] с. 23), однако мы смогли предложить альтернативный и более простой способ доказательства, не использующий производящие функции, а лишь продвинутые идеи комбинаторики.

- Установлено (Теорема 18):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Аналогично, установлено:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}(G(n, \frac{1}{2}) - \text{эйлеров})}{\mathbb{P}(G(n, \frac{1}{2}) - \text{чётный})} = 1$$

То есть подтвердилась гипотеза о том, что в пределе основным ограничивающим фактором становится четность степеней вершин.

- Получено неравенство (Теорема 14):

$$f(n) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot f(n-1)$$

из которого следует что $f(n) > f(n-1)$ при $n \geq 2$ (Теорема 15).

- Были получены нижняя и верхняя оценки числа эйлеровых графов на n четном и нечетном количестве вершин (Теорема 11 и Теорема 16):

$$f(n) \in \left[2^{\frac{n(n-3)}{2}}; 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \right] \text{ для } n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$f(n) \in \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{2^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}}{2}; \frac{2 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n(n-1)} \right] \text{ для } n \equiv 0 \pmod{2}$$

А также, как следствия, оценки вероятности эйлеровости графа:

$$\mathbb{P}(G = (V, E) - \text{эйлеров}) \in \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n; \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \text{ для } n \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\mathbb{P}(G = (V, E) - \text{эйлеров}) \in \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}; \frac{2}{n(n-1)} \right] \text{ для } n \equiv 0 \pmod{2}$$

- Установлены конструктивные алгоритмы получения эйлеровых графов при переходе с n на $(n+1)$ -ую вершину, использующие подсчет числа ребер, а также проведение новых (Теорема 12 и Теорема 13), что представляет научный интерес при рассмотрении и обобщении на вероятностные модели $G(n, p)$.
- С помощью *Python* и *matplotlib* проведено моделирование, визуализированы зависимости, и сделаны анализы графиков, что подтвердило теоретические выводы.

Таким образом, сочетание чётких аналитических формул и программного моделирования дает результаты в представлении о поведении эйлеровых графов в классической случайной модели, а предложенные методы, идеи и оценки могут быть расширены на более общие вероятностные модели $G(n, p)$.

5 Литература

Список литературы

- [1] Рейнгард Дистель. «Теория графов». Второе издание. Издательство Ин-та математики, 2002. с. 15 - 35.
- [2] А.М. Райгородский. «Модели случайных графов». Москва, издательство МЦНМО 2011. (Летняя школа «Современная математика» Дубна, июль 2008).
- [3] А.М. Райгородский. Курс «Теория вероятностей и математическая статистика. v1.4», 2025
<https://edu.sirius.online/#/course/2168/about>.
- [4] Викиконспекты университета ИТМО.
<https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php>.
- [5] Франк Харари и Эдгар М. Палмер, Перечисление графов, Издательство «Мир», 1977. с. 22 - 26.